Masih Relevankah Model Median dan Model Pusat Gravitasi dalam Penentuan Lokasi pada Zaman Komputer ini?

Harry Pranadi, Ph.D.

Abstrak: *Pada zaman lampau di mana komputer belum mudah diperoleh, model median dan model pusat gravitasi (center of gravity model) masih banyak bermanfaat, karena kesederhanaan perhitungannya walaupun tidak memberikan solusi yang optimal. Pada zaman komputer ini, dengan optimasi non-linier yang akan dibicarakan di bawah, solusi optimalnya dapat dengan mudah diperoleh.*

Pendahuluan

Pada tahap awal dalam menentukan lokasi fasilitas, model median dan model pusat gravitasi merupakan alat-alat bantu. Walaupun model-model tersebut tidak memberikan solusi yang optimal, kesederhanaan perhitungannya menyebabkan model-model tersebut banyak ditulis dalam buku-buku manajemen operasi, misalnya buku-buku dalam daftar pustaka di bawah.

Benarkah solusi optimalnya sulit diperoleh? Pada zaman lampau di mana komputer belum mudah diperoleh, mencari solusi optimalnya memang cukup panjang dan membutuhkan banyak waktu. Tetapi sekarang dengan bantuan komputer memungkinkan kita mencari solusi optimalnya dengan menggunakan model *optimasi non-linier* yang akan dibicarakan di bawah. Software optimasi non-linier sekarang mudah diperoleh, misalnya GINO (General INteractive Optimizer). Di bawah ini akan diperlihatkan bagaimana sederhana formulasi optimasinya dan betapa mudahnya pula mencari solusinya dengan bantuan software tersebut.

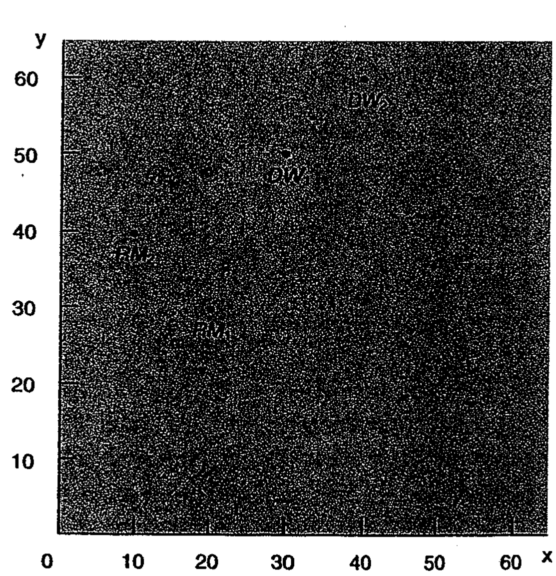
Sedikit review mengenai permasalahan penentuan lokasi fasilitas

Misalkan kita ingin mencari lokasi terbaik (optimal) untuk suatu pabrik yang akan:

- mendapat bahan bakunya dari *sumber-sumber* RM1 dan RM2
  (misalnya sebagai sumber adalah suppliersnya) dan
- mengirim hasil produksinya ke *tujuan-tujuan:* DW1 dan DW2
  (misalnya sebagai tujuan adalah warehousesnya)

seperti pada Gambar 1 (Ref. 1, h. 202). Misalkan koordinat lokasi pabrik yang akan kita cari adalah (X, Y). Kita akan mencari (X,Y) yang meminimalkan total biaya transportasi.

Gambar 1



Misalkan C_i = biaya transportasi per satuan muatan (load) per satuan jarak dari fasilitas-i ke (X, Y) atau dari (X, Y) ke fasilitas-i. Load adalah satuan dari barang yang akan dikirim, misalnya "truck load" atau yang lain.

L_i = Jumlah load tahunan yang harus dikirim dari fasilitas-i ke (X, Y) atau dari (X, Y) ke fasilitas-i.

D_i = Jarak dari fasilitas-i ke lokasi pabrik (X, Y).

Maka total biaya transportasinya dituliskan sebagai:

$$z = \Sigma\, C_i\, L_i\, D_i,\ i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots., n$$

di mana n adalah jumlah fasilitas (jumlah sumber dan tujuan).

Maka masalahnya adalah mencari lokasi X, Y yang meminimalkan total biaya transportasi z.

Apa yang dilakukan dalam model median

Di sini diasumsikan bahwa jarak yang ditempuh hanya boleh dalam arah horizontal dan/atau vertikal, sehingga jarak dari pabrik ke fasilitas-i diaproksimasikan sebagai

$D_i = | X\text{-}X_i | + | Y\text{-}Y_i |$, padahal sebenarnya

$D_i = \sqrt{(X\text{-}X_i)^2 + (Y\text{-}Y_i)^2}$

Jadi dalam model median ini, sisi miring suatu segi tiga siku-siku diaproksimasikan sebagai jumlah kedua sisi siku-sikunya. Padahal sebenarnya sisi miring = akar jumlah kuadrat sisi siku-sikunya. Dalam model median, aproksimasi ini dilakukan demi kemudahan perhitungan optimasinya. Maka hasil yang diperoleh tidak optimal.

Apa yang dilakukan dalam model pusat gravitasi (center of gravity model)

Dalam ilmu mekanika, bila kita mempunyai n buah benda yang

- beratnya masing-masing w_i, i = 1, 2, ..., n
- titik beratnya masing-masing (x_i, y_i), i = 1, 2, ..., n
- titik-titik berat (center of gravity) masing-masing benda terletak dalam satu bidang datar, maka titik berat keseluruhan benda-benda tersebut diberikan oleh (X, Y) di mana $X = \Sigma\,(w_i\, x_i) / \Sigma\,(w_i)$

  $Y = \Sigma\,(w_i\, y_i) / \Sigma\,(w_i)$

Dalam model pusat gravitasi untuk menentukan lokasi fasilitas, lokasi optimalnya diaproksimasikan sebagai (X, Y) di mana $X = \Sigma(C_iL_iX_i) / \Sigma(C_iL_i)$ dan

$Y = \Sigma(C_iL_iY_i) / \Sigma(C_iL_i)$

Jadi diaproksimasikan sebagai titik berat (center of gravity) dari n buah benda yang masing-masing beratnya C_iL_i dan yang titik-titik beratnya terletak dalam satu bidang datar. Karena berupa suatu aproksimasi maka lokasi yang diperoleh tidak optimal.

Model optimasi non-linier

Tidak seperti pada model median di mana jarak dari pabrik ke fasilitas-i diaproksimasikan sebagai

$D_i = | X\text{-}X_i | + | Y\text{-}Y_i |$

pada model ini kita tidak akan melakukan aproksimasi, melainkan langsung memakai harga eksaknya yaitu

$D_i = \sqrt{(X\text{-}X_i)^2 + (Y\text{-}Y_i)^2}$

Maka masalahnya menjadi masalah optimasi non-linier biasa:

Carilah X, Y dan D_i, i = 1, 2, ..., n untuk

$$\text{meminimalkan } z = \sum_{i=1}^{n} C_i\, L_i\, D_i, \qquad (1)$$

dengan constraint:

$$D_i = \sqrt{(X\text{-}X_i)^2 + (Y\text{-}Y_i)^2}, \qquad (2)$$

$$i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots., n$$

$$X, Y, D_i \geq 0$$

yang solusinya langsung dapat diperoleh dengan software GINO.

Contoh:

Misalnya diketahui seperti pada Gambar 1, di mana pabrik dengan koordinat (X, Y) akan menerima bahan baku dari sumber-sumber RM1 dan RM2, dan akan mengirimkan hasil produksinya ke tujuan-tujuan DW1 dan DW2. Data diberikan oleh Tabel 1 sebagai berikut:

Tabel 1

Fasilitas i		Koordinat X_i	Y_i	C_i	L_i
1	RM1	20	30	$1	700
2	RM2	10	40	1	900
3	DW1	30	50	1	400
4	DW2	40	60	1	500
					Total 2500

Dengan model optimasi non-linier:

Dicari X, Y, D1, D2, D3 an D4 untuk meminimalkan Total biaya transportasi

$$z = \Sigma\, C_i\, L_i\, D_i,\ i = 1, 2, 3, 4$$

$$= 700\ D1 + 900\ D2 + 400\ D3 + 500\ D4$$

dengan constraints

$$D1 = \sqrt{(X - 20)^2 + (Y - 30)^2}$$
$$D2 = \sqrt{(X - 10)^2 + (Y - 40)^2}$$
$$D3 = \sqrt{(X - 30)^2 + (Y - 50)^2}$$
$$D4 = \sqrt{(X - 40)^2 + (Y - 60)^2}$$

Dengan GINO langsung diperoleh solusi optimalnya, yaitu

$z = 35377.81$
$X = 16.99 \quad Y = 39.38$
$D1 = 9.85 \quad D2 = 7.01$
$D3 = 16.80 \quad D4 = 30.90$

Maka lokasi optimalnya adalah pada

$X = 16.99, Y = 39.38$

dengan biaya transportasi minimal, **$z = 35377.81$**

Untuk mendapat hasil di atas, penulisannya pada GINO sederhana sekali, yaitu

```
MODEL:
MIN = 700*D1 + 900*D2 + 400*D3 + 500*D4;
D1  = ((X-20)^2 + (Y-30)^2)^0.5;
D2  = ((X-10)^2 + (Y-40)^2)^0.5;
D3  = ((X-30)^2 + (Y-50)^2)^0.5;
D4  = ((X-40)^2 + (Y-60)^2)^0.5;
END
```

Selanjutnya kita tuliskan GO dan kita peroleh hasil di atas.

Dengan menggunakan model pusat gravitasi:

Lokasi optimalnya diberikan oleh harga aproksimasi sebagai berikut:

$X = \Sigma(C_i L_i X_i) / \Sigma(C_i L_i)$ dan

$Y = \Sigma(C_i L_i Y_i) / \Sigma(C_i L_i)$

$X = [1(700)(20) + 1(900)(10) + 1(400)(30) + 1(500)(40)] / [1(700) + 1(900) + 1(400) + 1(500)] = \mathbf{22.0}$

$Y = [1(700)(30) + 1(900)(40) + 1(400)(50) + 1(500)(60)] / [1(700) + 1(900) + 1(400) + 1(500)] = \mathbf{42.8}$

$$D1 = \sqrt{(X-20)^2+(Y-30)^2} = \sqrt{(22-20)^2+(42.8-30)^2} = 12.9553$$
$$D2 = \sqrt{(X-10)^2+(Y-40)^2} = \sqrt{(22-10)^2+(42.8-40)^2} = 12.3223$$
$$D3 = \sqrt{(X-30)^2+(Y-50)^2} = \sqrt{(22-30)^2+(42.8-50)^2} = 10.76290$$
$$D4 = \sqrt{(X-40)^2+(Y-60)^2} = \sqrt{(22-40)^2+(42.8-60)^2} = 24.8966$$

Total biaya transportasi:

$$\begin{aligned} z &= \Sigma C_i L_i D_i, i = 1, 2, 3, 4 \\ &= 700\,(12.9553) + 900\,(12.3223) + 400\,(10.76290) + 500\,(24.8966) \\ &= \mathbf{36912.24} \end{aligned}$$

Perbandingan hasil model-model tersebut:

Tabel 2

Model	Biaya total transportasi	X	Y
Optimasi non-linier	$35377.81	16.99	39.38
Pusat gravitasi	$36912.24	22.0	42.80
Median model	$44000 *	20	40

* Bagi yang berminat, perhitungannya dapat dilihat pada Ref. 1, h. 205

Kita lihat bahwa model optimasi non-linier memberikan total biaya transportasi yang lebih kecil.

Penutup

Kita lihat bahwa model median dan model pusat gravitasi tidak memberikan solusi yang optimal dan walaupun demikian merupakan model yang populer pada zaman di mana komputer masih sulit diperoleh, karena kemudahan perhitungannya. Sekarang zaman telah berubah di mana komputer mudah didapat dan penulis menunjukkan bahwa solusi optimalnya mudah sekali diperoleh dengan menggunakan model optimasi non-linier.

Daftar Pustaka

1. Adam, E.E., Jr., dan R.J. Ebert (1989). *Production and Operations Management,* edisi ke-4. Prentice Hall.
2. Adam, E.E., Jr., dan R.J. Ebert (1992). *Production and Operations Management,* edisi ke-5. Prentice Hall.
3. Chase, R.B., dan N.J. Aquilano (1995). *Production and Operations Management,* edisi ke-7. Irwin.
4. Heizer, J., dan B. Render (1996). *Production and Operations Management,* edisi ke-4. Prentice Hall.
5. Murdick, R.G., B. Render, dan R.S. Russell (1990). *Service Operations Management.* Allyn and Bacon.
6. Russel, R.S., dan B.W. Taylor III (1995). *Production and Operations Management.* Prentice Hall.

Harry Pranadi, Ph.D. adalah Faculty Member Sekolah Tinggi Manajemen Prasetiya Mulya.